Γραμμική Άλγεβρα Ι, Τμήμα Λ-Ω, 10/2/2020

Θέμα 1 (25 Μόρια)

(i) (13 Μόρια) Αν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η βαθμίδα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & \kappa & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \kappa & 5 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) (12 Μόρια) Αν $\kappa \in \mathbb{R}$, να λυθεί το σύστημα εξισώσεων (Σ) $\begin{cases} x + \kappa y - z = 2 \\ 2x - y + \kappa z = 5 \\ x + 10y - z = 1 \end{cases}$

Θέμα 2 (20 Μόρια)

Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ υπόχωροι του $\mathcal{E}$.

(i) (12 Μόρια) Να αποδείξετε ότι η ένωση $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$ αν και μόνο αν είτε $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ είτε $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$.

(ii) (8 Μόρια) Αν $\mathcal{E} = M_{3\times 4}(\mathbb{K})$, και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 7$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = 10$, να προσδιοριστούν οι δυνατές τιμές για τη διάσταση $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$. Πότε ισχύει ότι : **(α)** $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 5$, και **(β)** $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 7$;

Θέμα 3 (20 Μόρια)

(i) (5 Μόρια) Να βρεθεί το μέγιστο πλήθος των μηδενικών στοιχείων που μπορεί να έχει ένας αντιστρέψιμος 5×5 πίνακας πραγματικών αριθμών.

(ii) (5 Μόρια) Να εξεταστεί αν υπάρχουν γραμμικές απεικονίσεις $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ ώστε να ισχύει $\ker f = \operatorname{Im} f$.

(iii) (10 Μόρια) Να δειχθεί ότι ένας $\mathbb{K}-$διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}$ έχει ακριβώς δύο υπόχωρους αν και μόνο αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = 1$.

Θέμα 4 (15 Μόρια)

Να υπολογίσετε την ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & y & y & \dots & y & y \\ y & 0 & x & \dots & x & x \\ y & x & 0 & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & x & x & \dots & 0 & x \\ y & x & x & \dots & x & 0 \end{pmatrix}$$

Θέμα 5 (25 Μόρια)

Θεωρούμε τους υπόχωρους του $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{V} = \langle (1,0,-1,2), (-2,1,2,0), (0,1,0,4) \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{U} = \langle (1,0,1,-2), (1,1,0,-1), (1,-2,3,-4) \rangle.$$

(i) (10 Μόρια) Να βρεθούν βάσεις για του υπόχωρους $\mathcal{V}, \mathcal{U}$ και $\mathcal{V} + \mathcal{U}$. Είναι το άθροισμα $\mathcal{V} + \mathcal{U}$ ευθύ;

(ii) (5 Μόρια) Να βρεθεί υπόχωρος $\mathcal{Z}$ του $\mathbb{R}^4$ ώστε $\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{Z}$.

(iii) (5 Μόρια) Είναι οι $\mathbb{R}\,-$διανυσματικοί χώροι $\mathcal{V}$ και $\mathbb{R}_n[t]$, για κατάλληλο $n \geq 1$, ισόμορφοι; Αν ναι, τότε να κατασκευάσετε έναν ισομορφισμό $\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}_n[t]$.

(iv) (5 Μόρια)Είναι οι $\mathbb{R}\,-$διανυσματικοί χώροι $\mathcal{U}$ και $M_n(\mathbb{R})$, για κατάλληλο $n \geq 1$, ισόμορφοι; Αν ναι, τότε να κατασκευάσετε έναν ισομορφισμό $\mathcal{U} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$.

Θέμα 6 (25 Μόρια)

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, με

$$f(x, y, z, w) = (x + 2y - z + w, y + z - w, x + y - 2z + 2w).$$

(i) Να βρεθεί ο πίνακας A της f ως προς τις κανονικές βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ των $\mathbb{R}^4$ και $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα.

(ii) Να βρεθεί μία βάση του πυρήνα $\ker f$ της f η οποία και να επεκταθεί σε μία βάση $\mathcal{B}'$ του $\mathbb{R}^4$.

(iii) Να βρεθεί μία βάση της εικόνας $\operatorname{Im} f$ της f η οποία και να επεκταθεί σε μία βάση $\mathcal{C}'$ του $\mathbb{R}^3$.

(iv) Να βρεθεί ο πίνακας B της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}'$ και $\mathcal{C}'$ του ζητήματος (iii), αντιστοιχα.

(v) Να βρεθεί 3×3 αντιστρέψιμος πίνακας Q και αντιστρέψιμος 4×4 πίνακας P έτσι ώστε $Q^{-1}AP = B$.

Να γραφούν τα θέματα 1,4,5,6 και μόνο ένα εκ των 2,3

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ